

TÍNH CHẤT PHI CỎ ĐIỂN CỦA TRẠNG THÁI KẾT HỢP PHẢN ĐỐI XỨNG CHỒNG CHẬP THÊM HAI VÀ BỐT BA PHOTON

Phạm Hữu Khánh¹

Hồ Sỹ Chương²

Nguyễn Thị Thu Thủy²

Trương Minh Đức³

¹Trường THCS Phan Bội Châu, Xuân Lộc, Đồng Nai

²Trường Đại học Đồng Nai

³Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế

*Tác giả liên hệ: Trương Minh Đức - Email: tmduc2009@gmail.com

(Ngày nhận bài: 29/8/2023, ngày nhận bài chỉnh sửa: 8/9/2023, ngày duyệt đăng: 21/9/2023)

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu trạng thái kết hợp phản đối xứng chồng chập thêm hai và bớt ba photon (STPATPSACS). Các tính chất phi cổ điển của trạng thái này được chúng tôi nghiên cứu như nén tổng và hiệu hai mode, phản kết chùm, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và đặc biệt là tính chất đan rối. Các kết quả nghiên cứu cho thấy trạng thái này không những thể hiện tính chất nén tổng, nén hiệu hai mode và vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz mà còn có tính chất phản kết chùm hai mode bậc cao. Tính chất đan rối của STPATPSACS cũng được chúng tôi quan tâm nghiên cứu thông qua tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy bậc thấp và bậc cao. Các kết quả cho thấy STPATPSACS là một trạng thái đan rối theo tất cả các bậc thấp và cao. Đặc biệt, trong trường hợp bậc cao thì trạng thái này thể hiện tính chất rối mạnh hơn và vùng rối (theo biên độ kết hợp) cũng rộng hơn so với trường hợp bậc thấp.

Từ khóa: Nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, phản kết chùm hai mode, đan rối, tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy

1. Giới thiệu

Trường bức xạ điện từ có tính kết hợp, tính đơn sắc và tính định hướng cao như maser và laser đã được nghiên cứu và ứng dụng phổ biến từ lâu trong nhiều lĩnh vực như y học, quân sự, dân sự. Lần đầu tiên chúng được tạo ra trong thực nghiệm vào năm 1953 bởi Townes, Basov và Prokhorov. Tuy nhiên mãi đến năm 1963, Glauber và Sudarshan mới mô tả đầy đủ về mặt lý thuyết trường bức xạ này (Sudarshan, 1963; Glauber, 1963). Chúng đóng vai trò quan trọng trong cả thực nghiệm lẫn lý thuyết, đặc biệt là lĩnh vực quang học lượng tử và được gọi là các trạng thái kết hợp. Kể từ đó, có rất nhiều công trình nghiên cứu và phát triển về các trạng thái kết hợp này. Năm 1973, Dodonov và cộng sự đã đưa ra lý thuyết

về trạng thái kết hợp chẵn (đối xứng) và kết hợp lẻ (phản đối xứng) (Dodonov và nnk., 1974), hai trạng thái này được tạo ra bằng thực nghiệm năm 1992. Cũng trong năm 1992 này, Chai đã giới thiệu trạng thái kết hợp hai mode (Chai, 1992) và chỉ ra rằng trạng thái này có các hiệu ứng phi cổ điển như nén hai mode, vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwartz, và tuân theo thống kê sub-Poisson. Gần đây, nhiều nghiên cứu đã cho thấy, việc thêm và/hoặc bớt photon lên các trạng thái kết hợp đơn và đa mode có thể tạo ra các trạng thái mới có các đặc tính phi cổ điển và đặc biệt là tính chất đan rối được tăng cường (Agarwal & Tara, 1991; Duc & Noh, 2008; Ren & Zhang, 2019; Oulouda và nnk., 2021; Dat và nnk., 2022; Chuong và nnk., 2022; Thanh và nnk., 2023). Các

trạng thái mới này có tiềm năng ứng dụng cao vào các lĩnh vực như thông tin lượng tử, viễn tải lượng tử, khóa lượng tử, điều khiển lượng tử (Yang & Li, 2009; Hoai & Duc, 2016; Dat và nnk., 2018; Hai và nnk., 2021; Duc và nnk., 2021).

Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một trạng thái mới được gọi là trạng thái kết hợp phản đối xứng chồng chập thêm hai và bớt ba photon (STPATPSACS). Trạng thái này được định nghĩa như sau:

$$|Y\rangle_{ab} = N_{ab} (\hat{a}^{+2} + \hat{b}^3) |F_{ab}\rangle, \quad (1)$$

trong đó $|F_{ab}\rangle = (|a\rangle_a |b\rangle_b - |b\rangle_a |a\rangle_b)$ là trạng thái kết hợp phản đối xứng hai mode, \hat{a}^\dagger là toán tử sinh đối với mode a , \hat{b} là toán tử hủy đối với mode b , và $N_{\alpha\beta}$ là hệ số chuẩn hóa có dạng

$$|N_{\alpha\beta}|^2 = \left[4 + 4|\alpha|^2 + 4|\beta|^2 + |\alpha|^4 + |\beta|^4 + |\alpha|^6 + |\beta|^6 + x \operatorname{Re}(\alpha^3 \beta^2 + \alpha^2 \beta^3) + (x - 2) \operatorname{Re}(2 + 4\alpha^* \beta + \alpha^{*2} \beta^2 + \alpha^{*3} \beta^3) \right]^{-1}, \quad (2)$$

trong đó $\alpha = r_a e^{i\varphi_a}$, $\beta = r_b e^{i\varphi_b}$, r_a và r_b là các biên độ kết hợp ứng với mode a và b , φ_a và φ_b là các tham số pha và $x = 2 - 2e^{-r_a^2 - r_b^2 + 2r_a r_b \cos(\varphi_b - \varphi_a)}$.

2. Tính chất nén tổng và nén hiệu

2.1. Tính chất nén tổng hai mode

Một trạng thái được gọi là nén tổng hai mode theo phương φ nếu phương sai của trạng thái đó thỏa mãn

$$\langle (\Delta \hat{V}(\varphi))^2 \rangle < \frac{1}{4} \langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \rangle, \quad (3)$$

trong đó, $\hat{V}_\varphi = (e^{i\varphi} \hat{a} + \hat{b}^\dagger + e^{-i\varphi} \hat{a} \hat{b})/2$ là toán tử nén tổng hai mode Hillery (Hillery, 1989), \hat{N}_a và \hat{N}_b là các toán tử số hạt ứng với hai mode a và b . Từ (3), một hàm nén tổng đã được đưa ra (Dinh

& Duc, 2016) nhằm thuận lợi cho việc phát hiện và đánh giá mức độ nén tổng hai mode dưới dạng

$$S(\varphi) = \frac{4 \langle \hat{V}_\varphi^2 \rangle - 4 \langle \hat{V}_\varphi \rangle^2}{\langle \hat{N}_a \rangle + \langle \hat{N}_b \rangle + 1} - 1. \quad (4)$$

Theo đó, một trạng thái hai mode có tính nén tổng hai mode nếu $-1 \leq S(\varphi) < 0$. Khi $S(\varphi) = -1$, trạng thái bị nén cực đại, nhưng với $S(\varphi) \geq 0$ thì trạng thái không bị nén.

Đối với STPATPSACS được định nghĩa ở (1), các số hạng của hàm $S(\varphi)$ trong (4) lần lượt được xác định như sau:

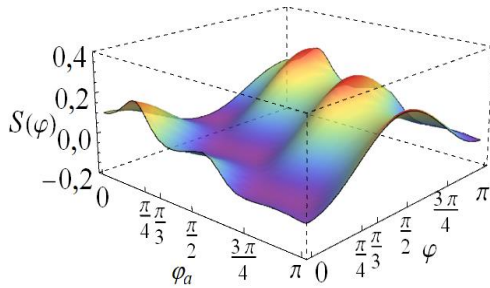
$$\begin{aligned} \langle \hat{V}_\varphi^2 \rangle = {}_{ab} \langle \Psi | \hat{V}_\varphi^2 | \Psi \rangle_{ab} = & \frac{1}{4} |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ 6x + 28(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + 9(|\alpha|^4 + |\beta|^4) + 2(|\alpha|^6 + |\beta|^6) + |\alpha|^8 + |\beta|^8 + 17(|\alpha|^4 |\beta|^2 + |\alpha|^2 |\beta|^4) + 3(|\alpha|^6 |\beta|^2 + |\alpha|^2 |\beta|^6) + 2(|\alpha|^2 |\beta|^8 + |\alpha|^8 |\beta|^2) + 32x|\alpha|^2 \times |\beta|^2 + (x-2) \operatorname{Re} \left[(28\alpha^* \beta + 9\alpha^{*2} \beta^2 + 2\alpha^{*3} \beta^3 + \alpha^{*4} \beta^4) + (17\alpha^* \beta + 3\alpha^{*2} \beta^2 + 2\alpha^{*3} \beta^3) \right] |\alpha|^2 \times |\beta|^2 \right\} + 2 \operatorname{Re} \left[(3x/2 + (x/2)|\alpha|^2 + x|\alpha|^2 |\beta|^2 + 5|\beta|^2) \alpha^2 \beta^3 + \alpha^3 \beta^2 (3x/2 + |\alpha|^2 + x|\alpha|^2 |\beta|^2 + (x/2)|\beta|^2) + (|\beta|^2 \alpha^4 \beta + |\alpha|^2 \alpha \beta^4) 5(x/2 - 1) \right] + 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[(12x + 8|\alpha|^2 + 8|\beta|^2 + |\alpha|^4 + |\beta|^4 + |\beta|^6 + |\alpha|^6) \alpha^2 \beta^2 + 4|\alpha|^2 |\beta|^4 \beta + 4|\alpha|^4 |\beta|^2 \alpha + 4(x-2)(|\beta|^2 \alpha^3 \beta + |\alpha|^2 \alpha \beta^3) + (x/2 - 1) \times |\beta|^4 \alpha^4 + (x/2 - 1)|\alpha|^4 \beta^4 + 2|\alpha|^4 \alpha + 2|\beta|^4 \beta + (x-2)(\alpha^{*2} \beta^3 + \alpha^3 \beta^{*2}) + (\alpha^2 \beta^* + \alpha^* \beta^2) \times 2|\alpha|^2 |\beta|^2 (x-2) + (x/2)|\alpha|^4 |\beta|^4 (\alpha + \beta) + (x/2 - 1)(|\alpha|^4 \alpha \beta^{*5} + |\beta|^4 \alpha^{*5} \beta) + (\alpha + \beta) \times \alpha^4 \beta^4 (x/2) \right] e^{2i\varphi} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{V}_\varphi \rangle^2 = & \left({}_{ab} \langle \Psi | \hat{V}_\varphi | \Psi \rangle_{ab} \right)^2 \\ = & |N_{\alpha\beta}|^4 \left\{ \operatorname{Re} \left[(6|\alpha|^2 + 6|\beta|^2 + |\alpha|^4 + |\beta|^4 + |\beta|^6 + |\alpha|^6) \alpha \beta + 2|\beta|^2 \alpha \beta^2 + 2|\alpha|^2 \alpha^2 \beta \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(x/2-1)\left((6\beta^2+2\beta^3+\alpha\beta^3+\alpha^2\beta^4)\right. \\
 &\times|\alpha|^2+|\beta|^2(6\alpha^2+2\alpha^3+\alpha^*\beta+\alpha^*\beta^2)) \\
 &+(x/2)\left(\alpha^3\beta^4+\alpha^4\beta^3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)|\alpha|^2\right. \\
 &\left.\times|\beta|^2\right)+6x\alpha\beta\left]e^{i\varphi}\right\}^2,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{N}_a \rangle &=_{ab} \langle \Psi | \hat{N}_a | \Psi \rangle_{ab} \\
 &= |N_{\alpha\beta}|^2 \left[4x+14|\alpha|^2+14|\beta|^2+|\alpha|^6+|\beta|^6+8|\alpha|^4 \right. \\
 &+8|\beta|^4+|\alpha|^2|\beta|^6+|\alpha|^6|\beta|^2+(x-2)\text{Re}(14\alpha^*\beta \\
 &+8\alpha^*\beta^2+\alpha^*\beta^3)+(x-2)|\alpha|^2|\beta|^2\text{Re}(\alpha^2\beta^2) \\
 &\left.+(2+|\alpha|^2)x\text{Re}(\alpha^2\beta^3)+(2+|\beta|^2)x\text{Re}(\alpha^3\beta^2) \right],
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{N}_b \rangle &=_{ab} \langle \Psi | \hat{N}_b | \Psi \rangle_{ab} \\
 &= |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ 2|\alpha|^2+2|\beta|^2+|\alpha|^4|\beta|^2+|\alpha|^2|\beta|^4 \right. \\
 &+|\alpha|^8+|\beta|^8+4x|\alpha|^2|\beta|^2+\left(|\alpha|^2|\beta|^2+2\right) \\
 &\times(x-2)\text{Re}(\alpha^*\beta)+(x-2)\text{Re}(\alpha^*\beta^4) \\
 &+ \text{Re}\left(2|\beta|^2\alpha^2\beta^3+2|\alpha|^2\alpha^3\beta^2+(x-2)\right. \\
 &\left.\times\left(|\alpha|^2\alpha\beta^4+|\beta|^2\alpha^4\beta\right)\right\}.
 \end{aligned} \tag{8}$$



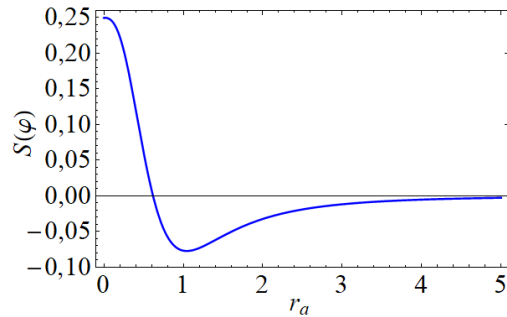
Hình 1: Đồ thị 3D của hàm nén tổng $S(\varphi)$ phụ thuộc vào biến φ_a và φ , các tham số khác được chọn là $r_a=1,2$; $r_b=2r_a$; $\varphi_b=\varphi_a$

Để biết được STPATPSACS có tính chất nén tổng hay không, đầu tiên chúng tôi vẽ đồ thị 3D của hàm $S(\varphi)$ ở hình 1, trong đó hàm nén tổng $S(\varphi)$ phụ thuộc vào biến φ_a và φ , các tham số khác được chọn là $r_a=1,2$; $r_b=2r_a$; $\varphi_b=\varphi_a$. Từ đồ thị này có thể thấy hàm $S(\varphi)$ có giá trị âm nhiều nhất ở một số vùng trung. Do vậy chúng tôi

chọn $\varphi_a=\varphi_b=\varphi=\pi/3$ để khảo sát tính chất nén tổng của STPATPSACS ở hình 2.

Hình 2 là đồ thị sự phụ thuộc của hàm số nén tổng $S(\varphi)$ vào biên độ kết hợp r_a , với các tham số khác được chọn $r_b=2r_a$; $\varphi_a=\varphi_b=\varphi=\pi/3$. Đồ thị cho thấy STPATPSACS có tính chất nén tổng hai mode ở vùng có biên độ kết hợp r_a không quá nhỏ. Cụ thể, trạng thái có tính chất nén tổng khi $0,6 < r_a < \infty$. Trong miền đó, $S(\varphi)$ luôn bé hơn hoặc bằng 0 và đạt giá trị nhỏ nhất tại $r_a \approx 1$. Khi r_a càng tăng, mặc dù $S(\varphi)$ âm nhưng có xu hướng tăng dần về không.

Với điều kiện khảo sát như trên, STPATPSACS thể hiện tính nén tổng và độ nén tổng đạt cực đại tại $r_a \approx 1$.



Hình 2: Khảo sát sự phụ thuộc của hàm số nén tổng $S(\varphi)$ vào biên độ kết hợp r_a , các tham số khác được chọn $r_b=2r_a$; $\varphi_a=\varphi_b=\varphi=\pi/3$

2.2. Tính chất nén hiệu hai mode

Một trạng thái có tính nén hiệu hai mode khi trạng thái này thỏa mãn

$$\langle (\Delta \hat{W}_\varphi)^2 \rangle < \frac{1}{4} \langle \hat{N}_a - \hat{N}_b \rangle, \tag{9}$$

trong đó, \hat{N}_a và \hat{N}_b là các toán tử số hạt ứng với hai mode a và b , và $\hat{W}_\varphi = (e^{i\varphi} \hat{a} \hat{b}^+ + e^{-i\varphi} \hat{a}^+ \hat{b})/2$ là toán tử nén hiệu hai mode Hillery (Hillery, 1989). Cũng như trường hợp nén tổng, một hàm nén hiệu (Dinh & Duc, 2016) đã được đưa ra từ (9) như sau:

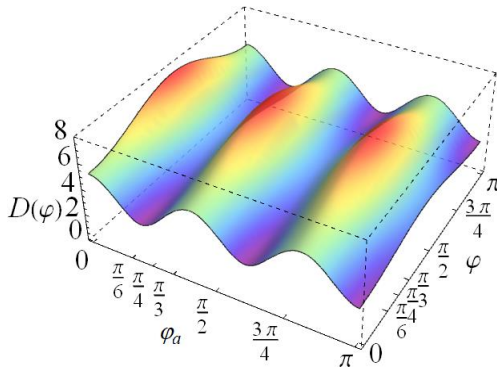
$$D(\varphi) = \frac{4\langle \hat{W}_\phi^2 \rangle - 4\langle \hat{W}_\phi \rangle^2}{\left| \langle \hat{N}_a \rangle - \langle \hat{N}_b \rangle \right|^2} - 1. \quad (10)$$

Một trạng thái hai mode có tính chất nén hiệu nếu $-1 \leq D(\varphi) < 0$.

Trong phương trình (10), các trị trung bình $\langle \hat{N}_a \rangle$ và $\langle \hat{N}_b \rangle$ đã được xác định ở (7) và (8), và hai trị trung bình còn lại được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \langle \hat{W}_\phi^2 \rangle &= {}_{ab} \langle \Psi | \hat{W}_\phi^2 | \Psi \rangle_{ab} \\ &= \frac{1}{4} |N_{\alpha\beta}|^2 x \left[4 + 14|\alpha|^2 + 8|\alpha|^4 + |\alpha|^6 + 10|\beta|^2 \right. \\ &\quad + |\beta|^8 + 32|\alpha|^2|\beta|^2 + 17|\alpha|^4|\beta|^2 + 2|\alpha|^6|\beta|^2 \quad (11) \\ &\quad + |\alpha|^2|\beta|^6 + 2|\alpha|^2|\beta|^8 + 2\text{Re}(\alpha^2\beta^3)(2 + |\alpha|^2 \\ &\quad + 5|\beta|^2 + 2|\alpha|^2|\beta|^2) + 2(2 + 4|\alpha|^2 + |\alpha|^4) \\ &\quad \left. \text{Re}(\beta^{*5}e^{i2\varphi}) + 2|\beta|^4 \text{Re}(\alpha^4\beta e^{i2\varphi}) \right. \\ &\quad \left. + 2(12 + 8|\alpha|^2 + |\alpha|^4 + |\beta|^6) \text{Re}(\alpha^2\beta^{*2}e^{i2\varphi}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{W}_\phi \rangle^2 &= |N_{\alpha\beta}|^4 \left[(6 + 6|\alpha|^2 + |\alpha|^4 + |\beta|^6) \text{Re}(\beta^* \alpha e^{i\varphi}) \quad (12) \right. \\ &\quad \left. + (2 + |\alpha|^2) \text{Re}(\beta^{*4} \alpha^* e^{i\varphi}) + |\beta|^2 \text{Re}(\alpha^3 \beta^2 e^{i\varphi}) \right]^2 x^2. \end{aligned}$$

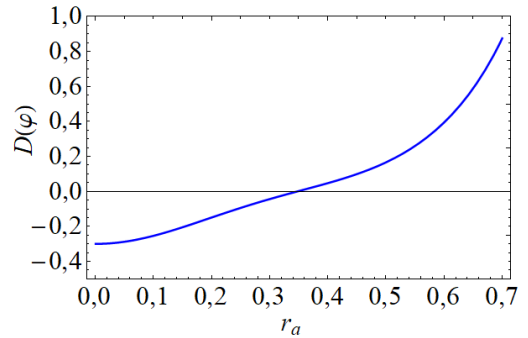


Hình 3: Đồ thị 3D của hàm nén hiệu $D(\varphi)$ phụ thuộc vào biến φ_a và φ , các tham số khác được chọn $r_a=1,2; r_b=2r_a, \varphi_b=\varphi_a$

Để đánh giá tính chất nén hiệu của STPATPSACS, chúng tôi vẽ đồ thị ở hình 3 và 4 cho hàm $D(\varphi)$. Hình 3 là đồ thị 3D của hàm nén hiệu $D(\varphi)$ phụ thuộc vào

biến φ_a và φ , các tham số khác được chọn là $r_a=1,2; r_b=2r_a; \varphi_b=\varphi_a$. Từ đồ thị này có thể thấy hàm $D(\varphi)$ có giá trị âm nhiều nhất ở một số vùng trung. Do vậy, chúng tôi chọn $\varphi_a=\varphi_b=\pi/6; \varphi=0$ để khảo sát tính chất nén hiệu của STPATPSACS ở hình 4.

Hình 4 là đồ thị sự phụ thuộc của hàm số nén hiệu $D(\varphi)$ vào biên độ kết hợp r_a , với các tham số còn lại được chọn $r_b=2r_a; \varphi_a=\varphi_b=\pi/6; \varphi=0$. Trạng thái STPATPSACS có tính chất nén hiệu hai mode ở vùng có biên độ kết hợp r_a nhỏ. Đồ thị cũng chỉ ra STPATPSACS có tính chất nén tổng trong vùng $0 < r_a < 3,5$. Trong vùng này chúng ta thấy $D(\varphi)$ luôn nhỏ hơn 0 và khi r_a tăng thì giá trị hàm $D(\varphi)$ tăng đến không.



Hình 4: Đồ thị của hàm nén hiệu $D(\varphi)$ phụ thuộc vào biến r_a , các tham số được chọn $r_b=2r_a; \varphi_a=\varphi_b=\pi/6; \varphi=0$

Như vậy, STPATPSACS có tính nén hiệu hai mode ở vùng có biên độ kết hợp r_a nhỏ, trong khi trạng thái kết hợp phản đối xứng không có tính chất nén hiệu.

3. Tính chất phản kết chùm và sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

3.1. Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Một trạng thái hai mode a, b được gọi là vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz nếu thỏa mãn bất đẳng thức (An & Duc, 2002) sau:

$$I = \frac{\left[\langle \hat{a}^{+2} \hat{a}^2 \rangle \langle \hat{b}^{+2} \hat{b}^2 \rangle \right]^{1/2}}{\left| \langle \hat{a}^+ \hat{a} \hat{b}^+ \hat{b} \rangle \right|} - 1 < 0. \quad (13)$$

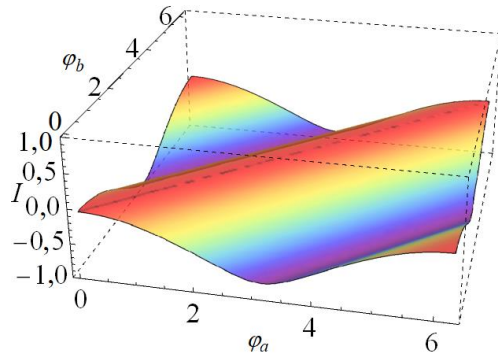
Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz là dấu hiệu cho thấy trạng thái có tính phi cổ điển.

Để xác định hàm I ở phương trình (13), chúng tôi lần lượt tính các giá trị trung bình sau:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^{+2} \hat{a}^2 \rangle &=_{ab} \langle \Psi | \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} | \Psi \rangle_{ab} \\ &= |N_{\alpha\beta}|^2 \left[4x + 32(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + 38(|\alpha|^4 + |\beta|^4) \right. \\ &+ 12(|\alpha|^6 + |\beta|^6) + (|\alpha|^8 + |\beta|^8) + (|\alpha|^4 |\beta|^6 + |\alpha|^6 \\ &\times |\beta|^4) + (x-2)\text{Re}(32\alpha^* \beta + |\alpha|^4 |\beta|^4 \alpha^* \beta + 38 \\ &\times \alpha^{*2} \beta^2 + 12\alpha^{*3} \beta^3 + \alpha^{*4} \beta^4 + |\beta|^4 \alpha^4 \beta + |\alpha|^4 \alpha \beta^4) \\ &\left. + 2(x + |\alpha|^2)^2 \text{Re}(\alpha^2 \beta^3) + 2(x + |\beta|^2)^2 \text{Re}(\alpha^3 \beta^2) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

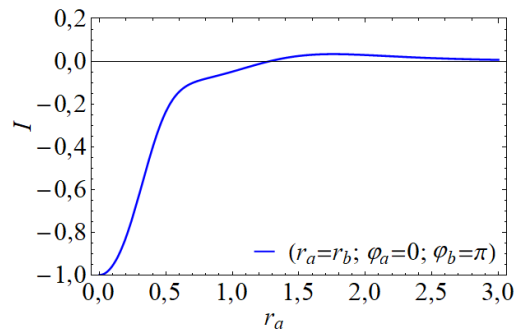
$$\begin{aligned} \langle \hat{b}^{+2} \hat{b}^2 \rangle &=_{ab} \langle \Psi | \hat{b}^+ \hat{b}^+ \hat{b} \hat{b} | \Psi \rangle_{ab} \\ &= |N_{\alpha\beta}|^2 \left[2(|\alpha|^4 + |\beta|^4) + (|\alpha|^{10} + |\beta|^{10}) \right. \\ &+ 4(|\alpha|^2 |\beta|^4 + |\alpha|^4 |\beta|^2) + x|\alpha|^4 |\beta|^4 \\ &+ (x-2)\text{Re}(2\alpha^{*2} \beta^2 + \alpha^{*5} \beta^5 + |\beta|^4 \alpha^5 \\ &+ |\alpha|^4 \beta^5 + 4|\alpha|^2 |\beta|^2 \alpha \beta^*) \\ &\left. + 2\text{Re}(|\beta|^4 \alpha^2 \beta^3 + |\alpha|^4 \alpha^3 \beta^2) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^+ \hat{b}^+ \hat{a} \hat{b} \rangle &=_{ab} \langle \Psi | \hat{a}^+ \hat{b}^+ \hat{a} \hat{b} | \Psi \rangle_{ab} \\ &= |N_{\alpha\beta}|^2 \left[4(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + |\alpha|^3 |\beta|^2 + |\alpha|^2 |\beta|^6 \right. \\ &+ 8(|\alpha|^4 |\beta|^2 + |\alpha|^2 |\beta|^4) + |\alpha|^2 |\beta|^8 + |\alpha|^8 |\beta|^2 \\ &+ 4\text{Re}(|\beta|^2 \alpha^{*2} \beta^{*3} + |\alpha|^2 \alpha^{*3} \beta^{*2}) + |\alpha|^2 |\beta|^2 \\ &\times 2\text{Re}(\alpha^{*2} \beta^{*3} + \alpha^{*3} \beta^{*2}) + 14x|\alpha|^2 |\beta|^2 \\ &+ (x-2)\text{Re}(|\alpha|^2 |\beta|^2 (8\alpha^* \beta + \alpha^{*2} \beta^2 \\ &+ \alpha^3 \beta^{*3} + \alpha^{*2} \beta^{*3} + \alpha^{*3} \beta^{*2}) \\ &\left. + (\alpha^* \beta + 2|\alpha|^2 \alpha^* \beta^{*4} + 2|\beta|^2 \alpha^4 \beta^*) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$



Hình 5: Đồ thị 3D của hàm I phụ thuộc vào biến φ_a và φ_b , các tham số khác được chọn $r_a=r_b=0,2$

Để kiểm tra sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz của STPATPSACS, chúng tôi vẽ đồ thị ở các hình 5 và 6 cho hàm I . Hình 5 là đồ thị 3D của hàm I phụ thuộc vào biến φ_a và φ_b , các tham số khác được chọn là $r_a=r_b=0,2$. Từ đồ thị này có thể thấy hàm I có giá trị âm ở một số vùng trũng. Do vậy chúng tôi chọn $\varphi_a=0; \varphi_b=\pi$ để khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz của STPATPSACS.



Hình 6: Đồ thị của hàm I phụ thuộc vào biến r_a , các tham số được chọn $r_b=r_a; \varphi_a=0; \varphi_b=\pi$

Hình 6 là đồ thị sự phụ thuộc của hàm số nén hiệu I vào biên độ kết hợp r_a , với các tham số được chọn $r_b=r_a, \varphi_a=0, \varphi_b=\pi$. Đồ thị cho thấy STPATPSACS vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ở vùng có biên độ kết hợp r_a thỏa mãn $0 \leq r_a < 1,3$. Trong vùng này chúng ta thấy I

luôn âm và khi r_a giảm thì giá trị hàm I giảm nhanh về giá trị -1 .

Từ các kết quả khảo sát ta nhận thấy STPATPSACS vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, đây cũng là minh chứng khẳng định trạng thái này có tính chất phi cổ điển.

3.2. Tính chất phản kết chùm hai mode

Điều kiện phản kết chùm được Lee đưa ra năm 1990, về sau được phát triển và mở rộng (An, 2002; Lee, 1990). Theo đó, tính chất phản kết chùm của trạng thái hai mode được đặc trưng bởi hàm số R_{ab} như sau:

$$R_{ab} = \frac{\langle \hat{N}_a^{(u+1)} \hat{N}_b^{(v-1)} \rangle + \langle \hat{N}_a^{(v-1)} \hat{N}_b^{(u+1)} \rangle}{\langle \hat{N}_a^{(u)} \hat{N}_b^{(v)} \rangle + \langle \hat{N}_a^{(v)} \hat{N}_b^{(u)} \rangle} - 1, \quad (17)$$

trong đó u và v là các số nguyên dương thỏa mãn $N_x^{(l)} = \prod_{j=0}^{l-1} (N_x - j)$ với $x = \{a, b\}$ và $u \geq v \geq 1$. Không mất tính tổng quát, có thể chọn $v = 1$, hàm phản kết chùm hai mode bậc cao trở thành

$$R_{ab} = \frac{\langle \hat{N}_a^{(u+1)} \rangle + \langle \hat{N}_b^{(u+1)} \rangle}{\langle \hat{N}_a^{(u)} \hat{N}_b \rangle + \langle \hat{N}_a \hat{N}_b^{(u)} \rangle} - 1. \quad (18)$$

Một trạng thái có tính phản kết chùm hai mode bậc cao nếu $R_{ab} < 0$, với R_{ab} càng âm thì độ phản kết chùm càng cao. Các số hạng của hàm R_{ab} được xác định

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_b^{(u+1)} \rangle &= \langle \hat{b}^{\dagger(u+1)} \hat{b}^{(u+1)} \rangle \\ &= |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ (2 + |\beta|^6 + 4|\alpha|^2 + |\alpha|^4) |\beta|^{2(u+1)} \right. \\ &+ (2 + |\alpha|^6 + 4|\beta|^2 + |\beta|^4) |\alpha|^{2(u+1)} + (x-2) \\ &\times \text{Re} \left[|\alpha|^4 |\beta|^4 (\alpha\beta^*)^{u-1} + 4|\alpha|^2 |\beta|^2 (\alpha\beta^*)^u \right. \\ &+ 2(\alpha\beta^*)^{u+1} + (\alpha\beta^*)^{u+4} \left. \right] + \text{Re} \left[(x-2) \right. \\ &\times (\alpha^{u+4} \beta^{*u-1} |\beta|^4 + |\alpha|^4 \alpha^{*u-1} \beta^{u+4}) \\ &+ 2(|\beta|^{2(u+1)} \alpha^2 \beta^3 + |\alpha|^{2(u+1)} \alpha^3 \beta^2) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

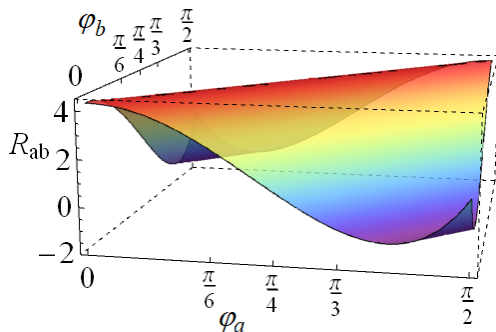
$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_a^{(u)} \hat{N}_b \rangle &= \langle \hat{a}^{\dagger u} \hat{a}^u \hat{b}^{\dagger} \hat{b} \rangle \\ &= |N_{\alpha\beta}|^2 |\alpha|^2 |\beta|^2 \left\{ u^2 (u-1)^2 (|\alpha|^{2(u-3)} + |\beta|^{2(u-3)}) \right. \\ &+ 4u^3 (|\alpha|^{2(u-2)} + |\beta|^{2(u-2)}) + 4(|\alpha|^{2u} + |\beta|^{2u}) \\ &\times (u+1) + 2(3u^2 + 4u+1) (|\alpha|^{2(u-1)} + |\beta|^{2(u-1)}) \\ &+ (|\alpha|^{2(u+1)} + |\beta|^{2(u+1)}) + (|\alpha|^{2(u-1)} |\beta|^2 + |\beta|^{2(u-1)} \\ &\times |\alpha|^6) + (x-2) \text{Re} \left[(u^2 (u-1)^2 + |\alpha|^4 |\beta|^4) \alpha^{*u-3} \right. \\ &\times \beta^{u-3} + 4u^3 (\alpha^{*u-2} \beta^{u-2}) + 2(3u^2 + 4u+1) \\ &\times (\alpha^{*u-1} \beta^{u-1}) + 4(u+1) (\alpha^{*u} \beta^u) + (\alpha^{*u+1} \beta^{u+1}) \left. \right] \\ &+ [2u(u-1) (|\alpha|^{2(u-3)} + |\beta|^{2(u-3)}) + 4u (|\alpha|^{2(u-2)} \\ &+ |\beta|^{2(u-2)}) + 2(|\alpha|^{2(u-1)} + |\beta|^{2(u-1)})] \text{Re} (\alpha^2 \beta^2) \\ &+ (x-2) \text{Re} \left((u(u-1) \alpha^{*u-5} \beta^{u-1} + 2u \alpha^{*u-4} \beta^u \right. \\ &+ \alpha^{*u-3} \beta^{u+1}) |\alpha|^4 + |\beta|^4 (u(u-1) \alpha^{u-1} \beta^{*u-5} \\ &+ 2u \alpha^u \beta^{*u-4} + \alpha^{u+1} \beta^{*u-3}) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_a^{(u+1)} \rangle &= \langle \hat{a}^{\dagger(u+1)} \hat{a}^{(u+1)} \rangle \\ &= |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ u^2 (u+1)^2 (|\alpha|^{2(u-1)} + |\beta|^{2(u-1)}) + 4 \right. \\ &\times (u+1)^3 (|\alpha|^{2u} + |\beta|^{2u}) + (|\alpha|^{2(u+2)} + |\beta|^{2(u+2)}) \\ &\times 4(u+1) + 2(|\alpha|^{2(u+1)} + |\beta|^{2(u+1)}) (3u^2 + 10u + 8) \\ &+ (|\alpha|^{2(u+3)} + |\beta|^{2(u+3)}) + (|\alpha|^{2(u+1)} |\beta|^6 + |\beta|^{2(u+1)} \\ &\times |\alpha|^6) + (x-2) \text{Re} \left[(u+1)^2 u^2 (\alpha^{*u-1} \beta^{u-1}) + 4 \right. \\ &\times (u+1)^3 (\alpha^{*u} \beta^u) + (3u^2 + 10u + 8) (\alpha^{*u+1} \beta^{u+1}) \\ &\times 2 + 4(u+2) (\alpha^{*u+2} \beta^{u+2}) + (\alpha^{*u+1} \alpha^3 \beta^{*3} \beta^{u+1}) \\ &+ (\alpha^{*u+3} \beta^{u+3}) \left. \right] + \text{Re} \left[2(u+1) u (\alpha^{*u-1} \alpha^{u+1} \beta^3 \right. \\ &+ \alpha^3 \beta^{*u-1} \beta^{u+1}) + (\alpha^{*u-1} \alpha^3 \beta^{u+1} + \alpha^{u+1} \beta^{*u-1} \beta^3) \\ &\times (u+1) u (x-2) + 4(\alpha^{*u} \alpha^{u+2} \beta^3 + \alpha^3 \beta^{*u} \beta^{u+2}) \\ &\times (u+1) + 2(x-2) (\alpha^{*u} \alpha^3 \beta^{u+2} + \alpha^{u+2} \beta^{*u} \beta^3) \\ &\times (u+1) + (x-2) (\alpha^{*u+1} \alpha^3 \beta^{u+3} + \alpha^{u+3} \beta^{*u+1} \beta^3) \\ &+ 2(\alpha^{*u+1} \alpha^{u+3} \beta^3 + \alpha^3 \beta^{*u+1} \beta^{u+3}) \left. \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_a \hat{N}_b^{(u)} \rangle &= \langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \hat{b}^{\dagger u} \hat{b}^u \rangle \\ &= |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ +16 (|\alpha|^2 |\beta|^{2u} + |\alpha|^{2u} |\beta|^2) \right. \\ &+ 4(|\beta|^{2u} + |\alpha|^{2u}) + 8(|\alpha|^4 |\beta|^{2u} + |\alpha|^{2u} |\beta|^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (|\alpha|^6 |\beta|^{2u} + |\alpha|^{2u} |\beta|^6) + (|\alpha|^2 |\beta|^{2(u+3)} \\
 & + |\alpha|^{2(u+3)} |\beta|^2) + \text{Re} \left[4(\alpha^u \beta^{*u}) + 16(|\alpha|^2 \right. \\
 & \times |\beta|^2 \alpha^{u-1} \beta^{*u-1}) + 8(|\alpha|^4 |\beta|^4 \alpha^{u-2} \beta^{*u-2} \\
 & + |\alpha|^6 |\beta|^6 \alpha^{u-3} \beta^{*u-3} + |\alpha|^2 |\beta|^2 \alpha^{u+2} \beta^{*u+2} \left. \right] \quad (22) \\
 & \times (x-2) + \text{Re} \left[4(|\beta|^u \alpha^2 \beta^3 + |\alpha|^u \alpha^3 \beta^2) \right. \\
 & + 2(x-2)(|\beta|^4 \alpha^{u+3} \beta^{*u-2} + |\alpha|^4 \alpha^{*u-2} \beta^{u+3}) \\
 & + 2(|\alpha|^2 |\beta|^u \alpha^2 \beta^3 + |\alpha|^u |\beta|^2 \alpha^3 \beta^2) + (x-2) \\
 & \left. \times (|\alpha|^2 |\beta|^6 \alpha^{u+2} \beta^{*u-3} + |\alpha|^6 |\beta|^2 \alpha^{*u-3} \beta^{u+2}) \right] \}.
 \end{aligned}$$

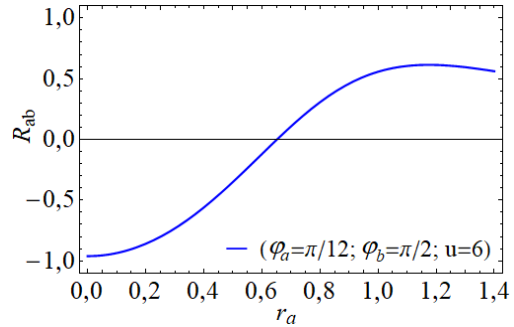
Để đánh giá tính chất phản kết chùm của STPATPSACS, chúng tôi vẽ đồ thị ở hình 7 và 8 cho hàm R_{ab} được đưa ra bởi (18). Hình 7 là đồ thị 3D của hàm phản kết chùm R_{ab} phụ thuộc vào biến φ_a và φ_b , các tham số khác được chọn là $r_a=r_b=0,2$; $u=6$. Từ đồ thị này có thể thấy hàm R_{ab} có giá trị âm ở một số vùng trũng. Do vậy chúng tôi chọn $\varphi_a = \pi/12$; $\varphi_b = \pi/2$ để khảo sát tính chất phản kết chùm của STPATPSACS.



Hình 7: Đồ thị 3D của hàm R_{ab} phụ thuộc vào biến φ_a và φ_b , các tham số khác được chọn $r_a=r_b=0,2$, $u=6$

Hình 8 là đồ thị sự phụ thuộc của hàm phản kết chùm R_{ab} vào biên độ kết hợp r_a , với các tham số được chọn $r_b=r_a$; $\varphi_a = \pi/12$; $\varphi_b = \pi/2$; $u=6$. Đồ thị cho thấy STPATPSACS có tính chất phản kết chùm bậc cao ở vùng có biên độ kết hợp r_a thỏa mãn $0 \leq r_a < 0,65$. Trong vùng này

tham số R_{ab} luôn âm, khi các tham số r_a giảm, giá trị R_{ab} tăng nhanh về -1.



Hình 8: Đồ thị của hàm R_{ab} phụ thuộc vào biến r_a , các tham số được chọn $r_b=r_a$; $\varphi_a = \pi/12$; $\varphi_b = \pi/2$; $u=6$

Kết quả khảo sát chứng tỏ rằng STPATPSACS có tính chất phản kết chùm bậc cao. Do đó đây là một trạng thái phi cổ điển.

4. Tính chất đan rối

4.1. Tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy

Năm 2006, Hillery và Zubairy đã đưa ra điều kiện dò tìm đan rối (Hillery & Zubairy, 2006) dưới dạng các bất đẳng thức. Theo đó, một trạng thái hai mode bị rối nếu vi phạm bất đẳng thức:

$$\left\langle \hat{a}^{+n} \hat{a}^n \hat{b}^{+m} \hat{b}^m \right\rangle \geq \left| \left\langle \hat{a}^n \hat{b}^{+m} \right\rangle \right|^2. \quad (23)$$

Để đơn giản chúng tôi đặt hàm đan rối

$$H(n; m) = \left| \left\langle \hat{a}^n \hat{b}^{+m} \right\rangle \right|^2 - \left\langle \hat{a}^{+n} \hat{a}^n \hat{b}^{+m} \hat{b}^m \right\rangle. \quad (24)$$

Một trạng thái hai mode bị rối nếu $R_H > 0$. Ngược lại nếu $R_H \leq 0$, trạng thái đó không bị rối.

4.2. Tính chất đan rối bậc nhất

Xét trường hợp bậc nhất ($n=m=1$), khi đó hàm rối R_H trở thành

$$H(1;1) = \left| \left\langle \hat{a} \hat{b}^{\dagger} \right\rangle \right|^2 - \left\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \hat{b}^{\dagger} \hat{b} \right\rangle. \quad (25)$$

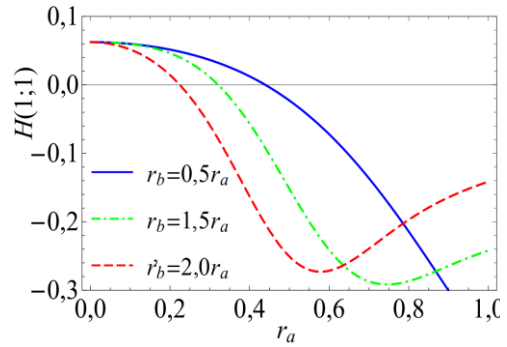
Kết quả tính toán thu được các số hạng trong các hàm rối $H(1;1)$ ở (25) như sau:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}\hat{b}^\dagger \rangle = & |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ 6(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta + (x/2-1) \right. \\ & \times (|\beta|^2 + |\alpha|^2) + 6(|\alpha|^2\alpha\beta^* + |\beta|^2\alpha^*\beta \\ & + (x/2-1)(|\beta|^2\alpha^*\beta + |\alpha|^2\alpha\beta^*)) \\ & + (|\alpha|^4\alpha\beta^* + |\beta|^4\alpha^*\beta + (x/2-1) \\ & \times (|\beta|^2\alpha^{*2}\beta^2 + |\alpha|^2\alpha^2\beta^{*2})) + (|\beta|^6\alpha\beta^* \\ & + |\alpha|^6\alpha^*\beta + (|\beta|^2\alpha^3\beta^{*3} + |\alpha|^2\alpha^3\beta^3)) \\ & \times (x/2-1) + (|\beta|^2\alpha^3\beta^2 + |\alpha|^2\alpha^2\beta^3 \\ & + (x/2-1)(|\beta|^2\alpha^3\beta^2 + |\alpha|^2\alpha^2\beta^3)) \\ & + \left[2(\alpha^*\beta^{*4} + \alpha^{*4}\beta^* + (\alpha^*\beta^{*4} + \alpha^{*4}\beta^*)) \right. \\ & \times (x/2-1) + (|\alpha|^2\alpha^*\beta^{*4} + |\beta|^2\alpha^{*4}\beta^* \\ & \left. + (x/2-1)(|\beta|^2\alpha^{*2}\beta^{*3} + |\alpha|^2\alpha^{*3}\beta^{*2})) \right] \left. \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b} \rangle = & |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ 4(|\beta|^2 + |\alpha|^2) + 32|\alpha|^2 \right. \\ & \times |\beta|^2 + 8|\alpha|^4|\beta|^2 + 8|\alpha|^2|\beta|^4 + |\alpha|^6|\beta|^2 \\ & + |\alpha|^2|\beta|^6 + |\alpha|^2|\beta|^8 + |\alpha|^8|\beta|^2 + (x-2) \\ & \times \text{Re} \left[(16 + 8\alpha^*\beta + \alpha^{*2}\beta^2 + \alpha^3\beta^{*3})|\alpha|^2 \right. \\ & \left. \times |\beta|^2 + 4\alpha\beta^* \right] + \text{Re} \left[(\alpha^2\beta^3 + \alpha^3\beta^2)2|\alpha|^2 \right. \\ & \times |\beta|^2 + 4(|\beta|^2\alpha^2\beta^3 + |\alpha|^2\alpha^3\beta^2) + (x-2) \\ & \left. (2|\beta|^2\beta\alpha^4 + 2|\alpha|^2\alpha\beta^4 + (\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3) \right. \\ & \left. \times |\alpha|^2|\beta|^2) \right] \left. \right\}, \quad (27) \end{aligned}$$

Từ các kết quả thu được ở (26) và (27) chúng tôi khảo sát hàm rối $H(1;1)$ ở hình 9, trong đó các đường cong là đồ thị $H(1;1)$ phụ thuộc vào biến r_a , với các tham số được chọn là $\varphi_a=\pi$; $\varphi_b=0$. Đường cong nét liền ứng với trường hợp $r_b=0,5r_a$. Đường cong nét gạch chấm ứng với $r_b=1,5r_a$, đường nét gạch ứng với $r_b=2r_a$. Các đồ thị cho thấy hàm rối bậc nhất $H(1;1)$ nhận giá trị dương trong vùng (vùng rối) mà biên độ kết hợp r_a không lớn. Ngoài ra có thể thấy vùng rối phụ thuộc vào mối quan hệ giữa r_a và r_b . Cụ

thể với $r_b=0,5r_a$ vùng rối là $0 \leq r_a < 0,44$; với $r_b=1,5r_a$ vùng rối là $0 \leq r_a < 0,32$; với $r_b=2r_a$ vùng rối là $0 \leq r_a < 0,22$. Như vậy STPATPSACS là trạng thái bị rối trong vùng mà biên độ kết hợp r_a và r_b không lớn vào khoảng dưới một đơn vị.



Hình 9: Đồ thị hàm $H(1;1)$ phụ thuộc vào biến r_a , với các tham số khác được chọn là $\varphi_a=\pi$; $\varphi_b=0$. Các đường cong nét liền, nét gạch và nét gạch chấm tương ứng với $r_b=0,5r_a$; $r_b=1,5r_a$; $r_b=2,0r_a$

4.3. Tính chất đan rối bậc cao

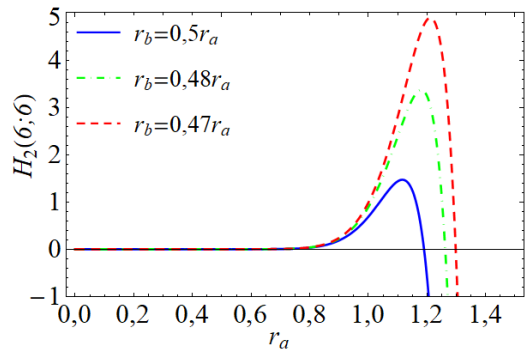
Để khảo sát tính chất đan rối của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng chông chập thêm hai và bớt ba photon theo tiêu chuẩn Hillery-Zubairy bậc cao, các số hạng trong các hàm rối $H(n;m)$ ở (24) cần được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^n\hat{b}^{\dagger m} \rangle = & |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ (n+1)(n+2)(\alpha^n\beta^{*m} \right. \\ & + \alpha^{*m}\beta^n + (x/2-1)(\beta^{*m}\beta^n + \alpha^{*m}\alpha^n)) \\ & + 2(n+2)(\alpha^*\alpha^{n+1}\beta^{*m} + \alpha^{*m}\beta^*\beta^{n+1} \\ & + (x/2-1)(\alpha^*\beta^{*m}\beta^{n+1} + \alpha^{*m}\alpha^{n+1}\beta^*)) \\ & + (\alpha^{*2}\alpha^{n+2}\beta^{*m} + \alpha^{*m}\beta^{*2}\beta^{n+2} + (x/2-1) \\ & \times (\alpha^{*2}\beta^{*m}\beta^{n+2} + \alpha^{*m}\alpha^{n+2}\beta^{*2})) + (\alpha^n\beta^3 \\ & \times \beta^{*m+3} + \alpha^{*m+3}\alpha^3\beta^n + (x/2-1)(\alpha^3\beta^{*m+3} \\ & \times \beta^n + \alpha^{*m+3}\alpha^n\beta^3)) + (\alpha^{n+2}\beta^{*m}\beta^3 + \alpha^{*m} \\ & \times \alpha^3\beta^{n+2} + (\alpha^3\beta^{*m}\beta^{n+2} + \alpha^{*m}\alpha^{n+2}\beta^3) \\ & \left. \times (x/2-1) \right\} + \left[(n^2-n)(\alpha^{n-2}\beta^{*m+3} + \beta^{n-2} \right. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \alpha^{*m+3} + (\beta^{*m+3} \beta^{n-2} + \alpha^{*m+3} \alpha^{n-2})(x/2 \\
 & - 1) + 2n(\alpha^* \alpha^{n-1} \beta^{*m+3} + \alpha^{*m+3} \beta^* \beta^{n-1} \\
 & + (x/2 - 1)(\alpha^* \beta^{*m+3} \beta^{n-1} + \alpha^{*m+3} \alpha^{n-1} \beta^*)) \\
 & + (\alpha^{*2} \alpha^n \beta^{*m+3} + \alpha^{*m+3} \beta^{*2} \beta^n + (x/2 - 1) \\
 & \times (\alpha^{*2} \beta^{*m+3} \beta^n + \alpha^{*m+3} \alpha^n \beta^{*2})) \Big], \\
 & \langle \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^n \hat{b}^{\dagger m} \hat{b}^m \rangle \\
 & = |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ (|\alpha|^{2(n-2)} |\beta|^{2m} + |\alpha|^{2m} |\beta|^{2(n-2)}) n^2 \right. \\
 & \times (n-1)^2 + 4n^3 (|\alpha|^{2(n-1)} |\beta|^{2m} + |\beta|^{2(n-1)} \\
 & \times |\alpha|^{2m}) + 2 (|\alpha|^{2n} |\beta|^{2m} + |\alpha|^{2m} |\beta|^{2n}) (3n^2 \\
 & + 4n + 1) + (|\alpha|^{2(n+1)} |\beta|^{2m} + |\alpha|^{2m} |\beta|^{2(n+1)}) \\
 & \times 4(n+1) + |\alpha|^{2(n+2)} |\beta|^{2m} + |\alpha|^{2m} |\beta|^{2(n+2)} \\
 & + |\alpha|^{2n} |\beta|^{2(m+3)} + |\alpha|^{2(m+3)} |\beta|^{2n} + (x-2) \\
 & \text{Re} \left[n^2 (n-1)^2 \alpha^{*n-2} \alpha^m \beta^{*m} \beta^{n-2} + 4n^3 \alpha^{*n-1} \right. \\
 & \times \alpha^m \beta^{*m} \beta^{n-1} + 4(n+1) (\alpha^{*n+1} \alpha^m \beta^{*m} \beta^{n+1}) \\
 & + (\alpha^{*n+2} \alpha^m \beta^{*m} \beta^{n+2}) + (\alpha^{*n} \alpha^{m+3} \beta^{*m+3} \beta^n) \\
 & + (\alpha^{*n} \alpha^m \beta^{*m} \beta^n) \times (6n^2 + 8n + 2) \Big] \\
 & + \text{Re} \left[2n(n-1) (\alpha^{*n-2} \alpha^n \beta^{*m} \beta^{m+3} + \alpha^{m+3} \right. \\
 & \times \alpha^m \beta^{*n-2} \beta^n) + 4n \times (\alpha^{*n-1} \alpha^{n+1} \beta^{*m} \beta^{m+3} \\
 & + \alpha^{*m} \alpha^{m+3} \beta^{*n-1} \beta^{n+1}) + 2 (\alpha^{*n} \alpha^{n+2} \beta^{*m} \beta^{m+3} \\
 & + \alpha^{*m} \alpha^{m+3} \beta^{*n} \beta^{n+2}) + ((\alpha^{*n-2} \alpha^{m+3} \beta^{*m} \beta^n \\
 & + \alpha^{*m} \alpha^n \beta^{*n-2} \beta^{m+3}) (n^2 - n) + (\alpha^{*n-1} \alpha^{m+3} \\
 & \times \beta^{*m} \beta^{n+1} + \alpha^{*m} \alpha^{n+1} \beta^{*n-1} \beta^{m+3}) 2n + (\alpha^{*n} \\
 & \times \alpha^{m+3} \beta^{*m} \beta^{n+2} + \alpha^{*m} \alpha^{n+2} + \beta^{*n} \beta^{m+3}) \Big] \\
 & \left. (x-2) \right\}. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Hình 10 bao gồm các đường cong là đồ thị hàm rối Hillery bậc cao $H(6;6)$ phụ thuộc vào biến r_a , với các tham số khác được chọn là $\varphi_a=5\pi/4$; $\varphi_b=0$; $n=m=6$. Đường cong nét liền ứng với trường hợp $r_b=0,5r_a$. Đường cong nét gạch chấm ứng với $r_b=0,48r_a$. Đường cong nét gạch ứng

với $r_b=0,47r_a$. Các đồ thị cho thấy hàm số bậc cao $H(6;6)$ nhận giá trị dương trong vùng (vùng rói) mà biên độ kết hợp r_a không lớn và phụ thuộc vào mối quan hệ giữa r_a và r_b . Cụ thể là với $r_b=0,5r_a$ vùng rói là $0 \leq r_a < 1,19$; với $r_b=0,48r_a$ vùng rói là $0 \leq r_a < 1,26$; với $r_b=0,47r_a$ vùng rói là $0 \leq r_a < 1,3$. Như vậy STPATPSACS là trạng thái bị rói bậc cao trong vùng mà biên độ kết hợp r_a và r_b không lớn và khoảng dưới hai đơn vị.



Hình 10: Đồ thị hàm rối Hillery $H(6;6)$ phụ thuộc vào biến r_a , với các tham số khác được chọn là $\varphi_a=5\pi/4$; $\varphi_b=0$; $n=m=6$. Các đường cong từ thấp đến cao tương ứng với $r_b=0,5r_a$; $r_b=0,48r_a$; $r_b=0,47r_a$

So sánh hai đường nét liền ($r_b=0,5r_a$) ở các hình 9 và 10 chúng ta có thể kết luận là STPATPSACS có mức độ đan rối ở trường hợp bậc cao lớn hơn trường hợp bậc nhất. Hơn nữa, vùng rói ở trường hợp bậc cao cũng rộng hơn so với trường hợp bậc nhất.

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã đề xuất trạng thái kết hợp phản đối xứng chồng chập thêm hai và bớt ba photon (STPATPSACS) bằng kỹ thuật thêm và bớt photon lên trạng thái kết hợp hai mode phản đối xứng. Các tính chất phi cổ điển của STPATPSACS đã được khảo sát cụ thể thông qua tính chất nén tổng hai

mode, nén hiệu hai mode, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, tính phản kết chùm hai mode và tính chất đan rối. Các kết quả thu được cho thấy STPATPSACS thể hiện đồng thời tính chất nén tổng hai mode và nén hiệu hai mode. Ngoài ra, trạng thái này còn thể hiện tính chất phản kết chùm hai mode trong cả hai trường hợp bậc thấp (bậc nhất) và bậc cao, và vi phạm mạnh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Đặc biệt, STPATPSACS là trạng thái bị rối theo tiêu chuẩn đan rối

Hillery-Zubairy ở cả hai trường hợp bậc thấp (bậc nhất) và bậc cao. Trong trường hợp bậc cao, tính chất đan rối của STPATPSACS thể hiện mạnh và tốt hơn trường hợp bậc thấp. Như vậy, STPATPSACS là trạng thái có tính chất phi cổ điển khá mạnh và có nhiều tiềm năng trong việc ứng dụng vào các nhiệm vụ lượng tử như thông tin lượng tử, viễn tải lượng tử, bảo mật lượng tử và điều khiển lượng tử.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Agarwal, G.S., & Tara, K. (1991). Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state. *Phys. Rev. A*, 43(1), 492. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.492>.
- An, N.B. (2002). Multimode higher-order antibunching and squeezing in trio coherent states. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 4, 222-227. DOI: 10.1088/146442-66/4/3/310.
- An, N.B., & Duc, T.M. (2002). Even and odd trio coherent states: Antibunching and violation of CauchySchwarz inequalities. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 4(5) 289-294. DOI: 10.1088/1464-4266/4/5/310.
- Chai, C.L. (1992). Two-mode nonclassical state via snperpositions of two-mode coherent states. *Phys. Rev. A*, 46(11), 7187. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.46.7187>.
- Chuong, H.S., Trung, H.N., & Duc, T.M. (2022). Non-classical properties of photon-added-and-subtracted two-mode pair coherent state. *Hue University Journal of Science: Natural Science*, 131(1A), 75-83. DOI: 10.26459/hueunijns.v131i1-A.6508.
- Dat, T.Q., Duc, T.M., & Chuong, H.S. (2018). Improvement quantum teleportation via the pair coherent states. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1034, 012004(1-6). DOI: 10.1088/1742-6596/1034/1/012004.
- Dat, T.Q., Chuong, H.S., Hung, D.V., & Duc, T.M. (2022). Higher-order nonclassicality in superposition of three-mode photon-added trio coherent states. *Commun. Phys.*, 32(2), 141-155. DOI: <https://doi.org/10.15625/0868-3166/16508>.
- Dinh, D.H., & Duc, T.M. (2016). Sum squeezing, difference squeezing and higher-order antibunching properties of two-mode even and odd charge coherent states. *Hue University Journal of Science: Natural Science*, 117(3), 15-24.

- Dodonov, V.V., Malkin, I.A., & Manko V.I. (1974). Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator. *Physica*, 72(3), 597. DOI: [https://doi.org/10.1016/0031-8914\(74\)90215-8](https://doi.org/10.1016/0031-8914(74)90215-8).
- Duc, T.M., & Noh, J. (2008). Higher-order properties of photon-added coherent states. *Optics Communications*, 281(10), 2842. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2008.01.043>.
- Duc, T.M., Chuong, H.S., & Dat, T.Q. (2021). Detecting nonclassicality and non-Gaussianity by the Wigner function. *J. Comput. Electro.*, 20, 2124-2134. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10825-021-01753-0>.
- Glauber, R.J. (1963). Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. *Physical Review*, 131(6), 2766. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766>.
- Hai, N.T.D., Duc, T.M., & Chuong, H.S. (2021). Investigating entanglement and quantum teleportation with three-photon added and single-photon subtracted two-mode odd coherent states. *Dong Nai University Journal of Science*, 21, 81-89.
- Hillery, M. (1989). Sum and difference squeezing of the electromagnetic field. *Phys. Rev. A*, 40(6), 3147-3155. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.3147>.
- Hillery, M., & Zubairy, M.S. (2006). Entanglement conditions for two-mode states: Applications. *Phys. Rev. A*, 74, 032333(1-7). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.032333>.
- Hoai, N.T.X., & Duc, T.M. (2016). Nonclassical properties and teleportation in the two-mode photon-added displaced squeezed states. *Int. J. Mod. Phys. B*, 30(7), 1650032 (1-15). DOI: 10.1142/S0217979216500326.
- Lee, C.T. (1990). Many-photon antibunching in generalized pair coherent states. *Phys. Rev. A*, 41(3), 1569-1575. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.41.1569>.
- Oulouda, Y., Falaki, M.E., & Daoud, M. (2021). Non-classicality and Non-Gaussianity of Photons Added and Subtracted Multi-Coherent States. *Int. J. Theor. Phys.*, 60, 2013-2024. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-021-04731-1>.
- Ren, G., & Zhang, W. (2019). Nonclassicality of superposition of photon-added two-mode coherent states. *Optik*, 181, 191-201. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.12.078>.
- Sudarshan, E.C.G. (1963). Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, 10(7), 277. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.277>.
- Thanh, L.T.H., Chuong, H.S., Dat, T.Q., & Duc, T.M. (2023). Enhancement of dynamical entanglement in a dispersive two-mode Jaynes–Cummings model via superposition of photon-added pair coherent state. *Laser Phys. Lett.*, 20(7), 075203(1-10). DOI: 10.1088/1612-202X/acde74.

Yang, Y., & Li, F.L. (2009). Entanglement properties of non-Gaussian resources generated via photon subtraction and addition and continuous-variable quantum-teleportation improvement. *Phys. Rev. A*, 80, 022315(1-9). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.022315>.

NONCLASSICAL PROPERTIES OF SUPERPOSITION OF TWO-PHOTON-ADDED AND THREE-PHOTON-SUBTRACTED ANTISYMMETRIC COHERENT STATE

*Pham Huu Khanh*¹

*Ho Sy Chuong*²

*Nguyen Thi Thu Thuy*²

*Truong Minh Duc*³

¹Phan Boi Chau Secondary School, Xuan Loc District, Dong Nai Province

²Dong Nai University

³University of Education, Hue University

*Corresponding author: Truong Minh Duc - Email: tmduc2009@gmail.com

(Received: 29/8/2023, Revised: 8/9/2023, Accepted for publication: 21/9/2023)

ABSTRACT

In this paper, we introduce the superposition of two-photon-added and three-photon-subtracted antisymmetric coherent state (STPATPSACS). The nonclassical properties of this state have been investigated, including two-mode sum squeezing, two-mode different squeezing, antibunching, violation of the Cauchy-Schwarz inequality, and entanglement. The research results demonstrate that this state exhibits two-mode sum squeezing, two-mode different squeezing, and violation of the Cauchy-Schwarz inequality, as well as featuring higher-order antibunching. Moreover, the entanglement property of the STPATPSACS has been examined through the first and the higher order of the Hillery-Zubairy entanglement criteria. The obtained results show that this state is an entangled state in any order. Especially, in the higher-order case, the entanglement characteristic of the STPATPSACS is stronger, and its entanglement region is wider than in the first-order case.

Keywords: *Two-mode sum squeezing, two-mode different squeezing, violation of the Cauchy-Schwarz inequality, antibunching, entanglement, Hillery-Zubairy entanglement criteria*