VỀ DẠNG JORDAN CỦA CÁC MA TRẬN TRÊN VÀNH CHIA CÓ ƯỚC CƠ SỞ ĐƠN

Cao Minh Nam
Phân hiệu tại Thành phố Hồ Chí Minh, Trường Đại học Giao thông vận tải
Email liên hệ: namcm@utc.edu.vn

(Ngày nhận bài: 14/4/2023, ngày nhận bài chỉnh sửa: 15/5/2023, ngày duyệt đăng: 25/5/2023)

TÓM TẮT

Mục tiêu chính của bài báo này là trình bày một số kỹ thuật phân tích ma trận trên vành chia của P. M. Cohn theo một cách trực quan và dễ hiểu. Từ các kết quả đó, chúng tôi chứng minh được rằng mọi ma trận có ước cơ sở đơn trên vành chia D đều đồng dạng với một ma trận dạng Jordan, trong đó D là vành chia tâm F thỏa mãn mọi đa thức bất khả quy trên F đều có nghiệm trong D và D chứa bao đóng đại số của F.

Từ khóa: *Vành chia, phân tích ma trận, ma trận dạng Jordan*

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi chủ yếu trình bày lại sự phân tích ma trận trên vành chia sử dụng các kỹ thuật của P. M. Cohn đã được trình bày trong các tài liệu (Cohn, Free rings and their relations, 1985) và (Cohn, Skew fields - Theory of General Division Rings, 1995). Việc hiểu và vận dụng được các kết quả của P. M. Cohn có nhiều ứng dụng trong thực tiễn nghiên cứu. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi sẽ làm rõ hơn các kết quả của P. M. Cohn về sự phân tích của các không gian vectơ hữu hạn chiều trên một vành chia, từ đó dẫn đến các kết quả về sự phân tích ma trận trên vành chia theo một cách đơn giản và dễ hiểu nhất.

Thông qua sự phân tích trên, chúng tôi cũng đã chứng minh được rằng trong lớp các vành chia D đại số trên tâm F thỏa mãn tính chất và mọi đa thức bất khả quy trên F đều có nghiệm trong D và D chứa bao đóng đại số của F, mọi ma trận $A \in \mathrm{M}_n(D)$ có ước cơ sở đơn đều đồng dạng với một ma trận dạng Jordan $J(\alpha)$, với $\alpha \in D$.

Các ký hiệu được sử dụng trong bài báo này là thông thường; chẳng hạn, D là vành chia, $\mathrm{M_n}(D)$ là vành các ma trận cấp n trên vành chia D, F là trường và $\overline{F}$ là bao đóng đại số của F.

2. Một số kết quả trên miền các iđêan chính

Trước tiên, ta nhắc lại một số khái niệm cần thiết cho việc nghiên cứu về chủ đề này. Cho R là một vành (có thể không giao hoán) có đơn vị. Vành R được gọi là *miền* nếu mọi phần tử khác 0 của R đều không là ước của 0 và miền R được gọi là *miền các iđêan trái chính* nếu mọi iđêan trái của R là iđêan chính; tức là nếu I là iđêan trái của R, thì $I = Ra$, với $a \in R$. Tương tự, ta có định nghĩa của miền các *iđêan phải chính*. Miền R được gọi là *miền các iđêan chính* nếu R vừa là miền các iđêan trái chính vừa là miền các iđêan phải chính.

Trong miền R, phần tử $c \in R$ khác 0 và không là ước của 0 được gọi là *chính quy (không suy biến)*. Hơn nữa, nếu $cR = Rc$ thì lúc này c được gọi là *bất biến*. Phần tử a được gọi là *bất khả quy* nếu a không khả nghịch và a không viết được thành tích của hai phần tử không khả nghịch. Phần tử bất biến c được gọi là *I-bất khả quy* nếu c không có nhân tử bất biến nào khác ngoài các phần tử khả nghịch và các phần tử liên kết với c; nhắc lại một phần tử c' được gọi là *liên kết* với c nếu tồn tại các phần tử khả nghịch $u, v \in R$ sao cho $ucv = c'$. Phần tử a được gọi là *ước toàn phần* của b, ký hiệu $a||b$ nếu tồn tại phần tử bất biến c sao cho $a|c$ và $c|b$; trong đó $a|b$ nếu tồn tại $r \in R$ sao cho $ar = b$ hay a là *nhân tử trái* của b.

Một phần tử $a \in R$ được gọi là bị chặn nếu a là ước của một phần tử bất biến nào đó. Phần tử *hoàn toàn không bị chặn* trong miền R là phần tử không có nhân tử bị chặn nào khác ngoài các phần tử khả nghịch. Phần tử $a \in R$ được gọi là *không tách được* nếu môđun ${}^{R}/_{aR}$ là không thể được viết thành tổng trực tiếp của hai R-môđun con thực sự.

Kết quả sau cho ta thấy rằng mọi ma trận trên miền các iđêan chính đều liên hợp với một ma trận dạng đường chéo. Cụ thể,

Mệnh đề 2.1. Cho R là miền các iđêan chính và ma trận $A \in \mathrm{M}_n(R)$. Khi đó, tồn tại các ma trận khả nghịch $Q, P \in \mathrm{M}_n(R)$ sao cho

$$QAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0^{n-k}),$$

trong đó $\lambda_i \,||\lambda_{i+1}$ và $\lambda_k \neq 0$. Hơn nữa, các λ_i là duy nhất sai khác một phép đồng dạng.

Chứng minh

Xem (Cohn, Free rings and their relations, 1985) Theorem 1.1, Section 8.■

Cho $D[t]$ là vành các đa thức trên vành chia D, trong đó mọi đa thức $f(t) \in D[t]$ đều có dạng $f(t) = a_0 + ta_1 + t^2a_2 + \dots + t^na_n$ với $n \in \mathbb{N}$ và $a_i \in D, i = 1,2, \dots, n$. Mệnh đề tiếp theo cho ta biết hình dạng của các phần tử bất biến trong vành $D[t]$.

Mệnh đề 2.2. Cho D là vành chia tâm F và $D[t]$ là vành đa thức trên D với biến t thuộc tâm. Khi đó, một đa thức đơn khởi trong $D[t]$ là bất biến khi và chỉ khi tất cả các hệ số của đa thức nằm trong F.

Chứng minh

Xem (Cohn, Skew fields - Theory of General Division Rings, 1995) Proposition 2.2.2.■

Mệnh đề 2.3. Cho R là miền các iđêan chính. Giả sử $a \in R$ là phần tử không tách được và bị chặn. Giả sử a có sự phân tích như sau $a = p_1p_2 \dots p_r$, trong đó, $p_i, i = 1,2, \dots, r,$ là bất khả quy, bị chặn. Khi đó, các khẳng định sau là đúng:

a) Chặn trên nhỏ nhất của a có dạng p^s, trong đó $s \in \mathbb{N},\ s \leq r$ và p là chặn trên nhỏ nhất của p_1.

b) Trong tập hợp các phần tử không tách được và bị chặn, hai phần tử a, b đồng dạng với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng chặn trên nhỏ nhất.

Chứng minh

Xem (Cohn, Skew fields - Theory of General Division Rings, 1995) Proposition 1.5.6.■

Tiếp theo, ta có sự phân tích của các môđun xoắn, hữu hạn sinh trên miền các iđean chính thành tổng trực tiếp của các môđun con cyclic.

Mệnh đề 2.4. Cho R là miền các iđêan chính và M là R-môđun phải hữu hạn sinh bao gồm các phần tử xoắn. Khi đó,

$$M \cong {}^{R}/_{q_1R} \oplus {}^{R}/_{q_2R} \oplus \cdots \oplus {}^{R}/_{q_kR} \oplus {}^{R}/_{uR},$$

trong đó q_i là tích của các phần tử đồng dạng, bất khả quy, bị chặn và u là hoàn toàn không bị chặn. Hơn nữa, hạng tử ${}^{R}/_{uR}$ có thể không có mặt trong sự phân tích trên và điều này chỉ xảy ra khi môđun M bị chặn.

Chứng minh

Xem (Cohn, Free Ideal Rings and Localization in General Rings, 2006) Proposition 6.2.7.■

3. Sự phân tích ma trận trên vành chia

Ta nhắc lại rằng hai ma trận A và B thuộc $\mathrm{M}_n(D)$ được gọi là *liên kết* nếu tồn tại các ma trận khả nghịch P, $Q \in \mathrm{GL}_n(D)$ sao cho $A = QBP$. Hơn nữa, nếu $Q = P^{-1}$ thì ta nói ma trận A *đồng dạng* với B.

Cho V là không gian vectơ phải n chiều trên vành chia D và cho hệ các vectơ $(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là cơ sở của không gian V. Một tự đồng cấu $\theta: V \to V$ hoàn toàn được xác định bằng

$$\theta(v_j) = v_1a_{1j} + v_2a_{2j} + \cdots + v_na_{nj}, \forall j = 1,2, \dots, n.$$

Khi đó, phép tương ứng $\theta \mapsto A$, trong đó $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(D)$, xác định một đồng cấu giữa $\mathrm{End}_D(V)$ và $\mathrm{M}_n(D)$, trong đó $\mathrm{End}_D(V)$ là vành các tự đồng cấu của V trên D. Ma trận A lúc này được gọi *là ma trận biểu diễn của tự đồng cấu θ theo cơ sở* (v). Hơn nữa, ta đã biết rằng các ma trận biểu diễn của tự đồng cấu θ trong các cơ sở khác nhau hình thành nên các ma trận đồng dạng với A. Tiếp theo, ta có thể xem V như là một $D[t]$-môđun phải bằng cách đặt $\sum t^i c_i$ tương ứng với $\sum \theta^i c_i$. Khi đó, không gian V được gọi là $D[t]$-*môđun liên kết* với ma trận A.

Bổ đề sau đây cho chúng ta một điều kiện cần và đủ để hai ma trận đồng dạng dựa trên các môđun liên kết với chúng.

Bổ đề 3.1. Cho D là vành chia và A, B là hai ma trận thuộc $\mathrm{M}_n(D)$. Khi đó, ma trận A đồng dạng với ma trận B khi và chỉ khi các $D[t]$-môđun liên kết với A và B đẳng cấu với nhau.

Chứng minh

Gọi θ_A và θ_B lần lượt là các tự đồng cấu của các D-không gian vectơ n chiều V_A và V_B. Gọi (a) và (b) là các cơ sở của V_A và V_B tương ứng sao cho ma trận biểu diễn của các tự đồng cấu θ_A và θ_B lần lượt trong với các cơ sở (a) và (b) là A và B.

Giả sử $V_A \cong V_B$ như là các $D[t]$-môđun, ta gọi $\varphi: V_A \to V_B$ là một $D[t]$-đẳng cấu; khi đó, với mọi $v \in V_A$, $[(v)\theta_A]\varphi = [(v)\varphi]\theta_B$. Từ đây, $\theta_A\varphi = \varphi\theta_B$ $(*)$ và ta được sơ đồ các $D[t]$-đồng cấu sau

$$V_B \xrightarrow{\varphi^{-1}} V_A \xrightarrow{\theta_A} V_A \xrightarrow{\varphi} V_B.$$

Gọi P là ma trận biểu diễn của ánh xạ tuyến tính φ trong cặp cơ sở (a) và (b). Dễ thấy, $P^{-1}AP$ là ma trận biểu diễn của tự đồng cấu $\varphi^{-1}\theta_A\varphi$ trong cơ sở (b) của không gian V_B. Từ đẳng thức $(*)$, ta có $B = P^{-1}AP$. Vì vậy, ma trận A đồng dạng với ma trận B.

Ngược lại, giả sử $B = P^{-1}AP$, trong đó $P \in \mathrm{GL}_n(D)$; khi đó tồn tại một đẳng cấu φ giữa hai D-không gian vectơ V_A và V_B thỏa mãn tính chất $\varphi\theta_B = \theta_A\varphi$. Ta chứng minh rằng φ cũng là đẳng cấu giữa các $D[t]$-môđun liên kết V_A và V_B. Thật vậy, lấy bất kỳ

$f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n \in D[t]$,

ta có,

$$[vf(t)]\varphi = [v\,(c_0 1_A + \theta_A c_1 + \ \dots + \theta_A^n c_n)]$$
$$= (v)\varphi c_0 + (v)\varphi\theta_B c_1 + \cdots + (v)\varphi\theta_B^n c_n$$
$$= (v)\varphi[\,c_0 + \theta_B c_1 + \cdots + \theta_B^n c_n]$$
$$= [(v)\varphi]f(t).$$

Từ đây, ánh xạ tuyến tính φ là một đẳng cấu giữa hai $D[t]$-môđun V_A và V_B; do đó $V_A \cong V_B$ như là các $D[t]$-môđun.■

Định lý 3.2. Cho $A \in \mathrm{M}_n(D)$. Nếu V là $D[t]$-môđun liên kết với A thì V được phân tích thành tổng trực tiếp của các $D[t]$-môđun con cyclic

$$V \cong {D[t]}/{q_1 D[t]} \oplus {D[t]}/{q_2 D[t]} \oplus \cdots \oplus {D[t]}/{q_k D[t]} \oplus {D[t]}/{uD[t]},$$

trong đó, mỗi q_i là tích của các phần tử bất khả quy bị chặn, đồng dạng với nhau và u là phần tử hoàn toàn không bị chặn.

Chứng minh

Gọi $(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ và $(w) = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ là hai cơ sở của $D[t]$-môđun phải $D[t]^n$. Ta xét sơ đồ các đồng cấu của các $D[t]$-môđun phải như sau:

$$0 \to D[t]^n \xrightarrow{\sigma} D[t]^n \xrightarrow{\psi} V \to 0, \quad (*)$$

trong đó, tự đồng cấu σ được xác định bởi ma trận $A - tI_n =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$$

theo cặp cơ sở $(u), (w)$ và đồng cấu ψ được xác định bởi $\psi(w_i) = v_i$, với mọi $i = 1,2, \dots, n$.

Trước tiên, với các đồng cấu σ và ψ như trên, dễ thấy $\sigma\psi = 0$; từ đây, ta có $\operatorname{Im}\sigma \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Sơ đồ $(*)$ là một dãy khớp ngắn các $D[t]$-môđun phải. Thật vậy, vì hệ $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ là cơ sở của $D[t]^n$ nên hệ $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_n\}$ sinh ra toàn bộ môđun ${D[t]^n}/{\mathrm{Im}\,\sigma}$ như là một $D[t]$-môđun phải. Hơn nữa, vì

$$w_1a_{1i} + w_2a_{2i} + \cdots + w_na_{ni} - w_it = (u_i)\sigma \in \mathrm{Im}\,\sigma$$

nên

$\overline{w_i}t = \overline{w_1}a_{1i} + \overline{w_2}a_{2i} + \cdots + \overline{w_n}\,a_{ni}$, với mọi $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Từ đây, D-không gian $\langle \overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_n\rangle$ bằng toàn bộ không gian ${D[t]^n}/{\mathrm{Im}\,\sigma}$. Tiếp theo, ta xét phép tương ứng $\overline{\psi}\colon {D[t]^n}/{Im\,\sigma} \to V$ với $\overline{\psi}(\overline{w_1}c_1 + \overline{w_2}c_2 + \cdots + \overline{w_n}c_n) = v_1c_1 + v_2c_2 + \cdots v_nc_n$, trong đó $c_i \in D, i = 1,2,\dots,n$. Dễ thấy, đây là một tự đẳng cấu của các D-không gian vectơ. Từ đây, ta có $p\overline{\psi} = \psi$, trong đó $p\colon D[t]^n \to {D[t]^n}/{Im\,\sigma}$ là toàn cấu chính tắc. Vì vậy, ψ là một toàn cấu. Tiếp theo, ta chứng minh σ là đơn cấu. Thật vậy, giả sử

$$u = u_1a_1(t) + u_2a_2(t) + \cdots u_na_n(t) \in D[t]^n \setminus \{0\},$$

trong đó $a_i(t) \in D[t], i = 1,2,\dots,n$. Khi đó,

$$[\sigma(v)]_{(w)} = \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-t \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1(t)$ là đa thức có bậc lớn nhất khác 0 trong các đa thức $a_i(t)$, $i = 1,2,\dots,n$. Từ đây,

$$b_1(t) = (a_{11} - t)a_1(t) + a_{12}a_2(t) + \cdots + a_{1n}a_n(t) \quad (1)$$

Mặt khác, $(a_{11} - t)a_1(t)$ là hạng tử khác 0 và có bậc cao nhất trong các hạng tử của $b_1(t)$ theo sự phân tích (1). Từ đây, $b_1(t) \neq 0$ và do đó $\sigma(u) \neq 0$. Điều này có nghĩa là σ là đơn cấu và vì vậy dãy $(*)$ là dãy khớp ngắn các R-môđun phải. Vì tự đồng cấu σ là đơn ánh nên ma trận $A - tI_n$ là ma trận không suy biến; từ đây theo Mệnh đề 2.1, ma trận $A - tI_n$ liên kết với $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, trong đó $\lambda_i || \lambda_{i+1}$ với mọi $i = 1,2,\dots,n-1$. Từ đây,

$$\mathrm{Im}\,\sigma \cong \lambda_1D[t] \oplus \lambda_2D[t] \oplus \cdots \oplus \lambda_nD[t]$$

và

$$V \cong {D[t]}/{\lambda_1D[t]} \oplus {D[t]}/{\lambda_2D[t]} \oplus \dots \oplus {D[t]}/{\lambda_nD[t]}$$

như là các $D[t]$-môđun phải. Ta đã biết λ_i, $i = 1,2,\dots,n-1$, bị chặn. Mặt khác, theo Mệnh đề 2.4, ta có sự phân tích

$$V \cong {D[t]}/{q_1D[t]} \oplus {D[t]}/{q_2D[t]} \oplus \cdots \oplus {D[t]}/{q_kD[t]} \oplus {D[t]}/{uD[t]},$$

trong đó, q_i là tích của các phần tử đồng dạng, bất khả quy, bị chặn và u là phần tử hoàn toàn không bị chặn.■

Trong chứng minh của Định lý 3.2, ta có,

$$V \cong {}^{D[t]}\!/_{\lambda_1 D[t]} \oplus {}^{D[t]}\!/_{\lambda_2 D[t]} \oplus \dots \oplus {}^{D[t]}\!/_{\lambda_n D[t]},$$

trong đó $\lambda_i || \lambda_{i+1}$ với mọi $i = 1,2,\dots,n-1$. Khi đó, phần tử λ_i *được gọi là nhân tử bất biến thứ i* của ma trận A, với $i = 1,2,\dots,n$. Bổ đề tiếp theo cho biết về mối liên quan giữa tính đại số của ma trận A và tính bị chặn của nhân tử bất biến thứ n.

Bổ đề 3.3. Cho D là vành chia tâm F và $A \in \mathrm{M}_n(D)$ có các nhân tử bất biến $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ thỏa mãn $\lambda_i || \lambda_{i+1}$, với $i = 1,2,\dots,n-1$. Khi đó, ma trận A đại số trên F khi và chỉ khi λ_n bị chặn.

Chứng minh

Do $D[t]$ là miền các iđêan chính, áp dụng Mệnh đề 2.1 ta thu được

$$Q(A - t.I_n)P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

trong đó $Q, P \in \mathrm{GL}_n(D)$. Mặt khác, theo chứng minh của Định lý 3.2, ma trận $A - t.I_n$ là không suy biến, và điều này dẫn đến các phần tử $\lambda_i, i = 1,2,\dots,n$ khác 0.Giả sử λ_n bị chặn, khi đó tồn tại phần tử bất biến $f(t) \in D[t]$ sao cho $\lambda_n | f(t)$. Hơn nữa, theo Mệnh đề 2.2, mỗi đa thức bất biến trong vành $D[t]$ đồng dạng với một đa thức có hệ số trong F. Ta có thể giả sử $f(t)$ là đa thức đơn khởi với các hệ số nằm trong trường F. Vì λ_i là ước của λ_n nên λ_i cũng là ước của $f(t)$, với mọi $i = 1,2,\dots,n$. Từ đây, tồn tại các đa thức $g_i(t) \in D[t]$ sao cho $g_i(t)\lambda_i = f(t)$ với $i = 1,2,..,n$. Nếu đặt$D =$

$$\begin{pmatrix} g_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_n(t) \end{pmatrix},$$

thì $DQ(A - t.I_n)P = f(t).I_n$. Mặt khác, ta có sự phân tích, $f(t).I_n = H(t.I_n - A) + L$, trong đó H là đa thức theo A với các hệ số trên $F[t]$ và L là đa thức theo biến A với các hệ số trên F. Từ đây,

$$f(A) = (P^{-1}DQ - H)(tI_n - A)\ (**).$$

Nếu ma trận $P^{-1}DQ - A \neq 0$ thì tồn tại một dòng khác 0, không mất tính tổng quát ta giả sử dòng thứ i khác 0 và các hệ số của dòng được ký hiệu như sau $(c_{i1} \quad c_{i2} \quad \cdots \quad c_{in})$. Giả sử c_{ij} là phần tử của dòng có bậc cao nhất. Khi đó, phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của ma trận $(P^{-1}DQ - H)(tI_n - A)$ là phần tử ở hàng thứ i và có bậc cao nhất. Vì thế, ma trận $(P^{-1}DQ - H)(tI_n - A)$ chứa hạng tử theo biến t, trong khi đó, $f(A)$ không chứa hạng tử theo biến t (mâu thuẫn). Vì vậy, $P^{-1}DQ - A = 0$. Theo đẳng thức $(**)$, $f(A) = 0$ và ma trận A đại số trên tâm F.Ngược lại, nếu tồn tại đa thức khác 0 đơn khởi $f(t)$ trên trường F thỏa mãn $f(A) = 0$ thì $f(t).I_n = H(tI_n - A)$, trong đó H là một đa thức theo biến A với các hệ số trên F. Từ đây, $f(t)I_n =$

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} H$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} HQ^{-1}.$$

Dễ thấy, hạng tử ở dòng thứ n và cột thứ n của ma trận $P^{-1} HQ^{-1}$ khác 0. Do đó, tồn tại $b(t) \in D[t]$ sao cho $f(t) = \lambda_n b(t)$ và điều này có nghĩa là λ_n bị chặn.■

Từ Định lý 3.2 và Bổ đề 3.3, ta có hệ quả.

Hệ quả 3.4. Cho D là vành chia tâm F, $A \in \mathrm{M}_n(D)$ và V là $D[t]$-môđun liên kết với A. Nếu A đại số trên F thì

$$V \cong {}^{D[t]}\!/_{q_1 D[t]} \oplus {}^{D[t]}\!/_{q_2 D[t]} \oplus \cdots \oplus {}^{D[t]}\!/_{q_k D[t]},$$

trong đó, mỗi q_i là tích của các phần tử bất khả quy bị chặn, đồng dạng với nhau.

Chứng minh

Theo Bổ đề 3.3, nếu ma trận A đại số trên tâm F thì nhân tử bất biến thứ n của ma trận A bị chặn. Gọi λ_n là nhân tử bất biến thứ n của A. Theo Mệnh đề 2.4 và Định lý 3.2, không tồn tại hạng tử ${}^{D[t]}\!/_{uD[t]}$ trong sự phân tích của ${}^{D[t]}\!/_{\lambda_n D[t]}$, trong đó u là phần tử hoàn toàn không bị chặn của $D[t]$. Do đó,

$$V \cong {}^{D[t]}\!/_{q_1 D[t]} \oplus {}^{D[t]}\!/_{q_2 D[t]} \oplus \cdots \oplus {}^{D[t]}\!/_{q_k D[t]}.$$ ■

Bổ đề 3.5. Cho D là vành chia tâm F thỏa D chứa bao đóng đại số của F và mọi đa thức bất khả quy trên F đều có nghiệm trong D. Nếu đa thức $f(t) \in D[t]$ không tách được, bị chặn thì $f(t)$ đồng dạng với một đa thức có dạng $(t-\alpha)^n$, trong đó $\alpha \in \overline{F}$ và $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Chứng minh

Áp dụng Proposition 8.3.5 trong (Cohn, Skew fields - Theory of General Division Rings, 1995), ta có điều phải chứng minh.■

Từ Định lý 3.2, các phần tử q_i được gọi là các *ước cơ sở* của ma trận A. Hơn nữa, nếu V được phân tích duy nhất thành ${}^{D[t]}\!/_{qD[t]}$, trong đó q là tích của các phần tử đồng dạng, bất khả quy và bị chặn, thì q được gọi là *ước cơ sở đơn* của A.

Định lý 3.6. Cho D là vành chia tâm F thỏa mãn mọi đa thức bất khả quy trên F đều có nghiệm trong D. Giả sử D chứa bao đóng đại số của F. Nếu $A \in \mathrm{M}_n(D)$ là ma trận có ước cơ sở đơn thì A đồng dạng với ma trận dạng Jordan sau

$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

trong đó, $\alpha \in \overline{F}$.

Chứng minh

Giả sử λ là ước cơ sở đơn của ma trận A, và theo định nghĩa của ước cơ sở đơn, ta có sự phân tích $\lambda = p_1 p_2 \ldots p_r$, trong đó các p_j là các phần tử đồng dạng với nhau và mỗi p_j là bất khả quy, bị chặn. Giả p_i là đa thức có bậc n_i, $i = 1,2,\ldots,r$. Khi đó, với mỗi giá trị i, hệ

$$\{1 + p_iD[t], t + p_iD[t], \dots, t^{n_i-1} + p_iD[t]\}$$

là một cơ sở của D-không gian $D[t]/_{p_i}D[t]$. Mặt khác, vì $D[t]/_{p_i}D[t] \cong D[t]/_{p_j}D[t]$ như các $D[t]$-môđun phải nên ta có thể xem như là đẳng cấu của các D-không gian. Từ đây, ta suy ra được $n_i = n_j$ với mọi $i \neq j$. Do đó, các đa thức p_i có cùng bậc d và $rd = n$. Vì λ là không tách được và bị chặn nên theo Bổ đề 3.5,

$$D[t]/_{\lambda D[t]} \cong D[t]/_{(t-\alpha_0)^nD[t]},$$

trong đó $\alpha_0 \in \overline{F}$. Rõ ràng, $D[t]/_{(t-\alpha_0)^nD[t]}$ là $D[t]$-môđun cyclic được sinh bởi phần tử

$$v = 1 + (t-\alpha_0)^nD[t].$$

Dễ thấy, hệ các vectơ

$$\{v, v(t-\alpha_0), v(t-\alpha_0)^2, \dots, v(t-\alpha_0)^{n-1}\}$$

là một cơ sở của D-không gian $D[t]/_{(t-\alpha_0)^nD[t]}$. Ta có các đẳng thức

$$vt = v.\alpha_0 + v(t-\alpha_0).1$$

$$v(t-\alpha_0)t = v(t-\alpha_0).\alpha_0 + v(t-\alpha_0)^2.1$$

$$v(t-\alpha_0)^2t = v(t-\alpha_0)^2.\alpha_0 + v(t-\alpha_0)^3.1$$

$$\vdots$$

$$v(t-\alpha_0)^{n-1}t = v(t-\alpha_0)^{n-1}.\alpha_0$$

Từ đây, ma trận biểu diễn của tự đồng cấu

$$\varphi: D[t]/_{(t-\alpha_0)^nD[t]} \longrightarrow D[t]/_{(t-\alpha_0)^nD[t]},$$

với $(v)\varphi = vt$ có dạng như sau:

$$J(\alpha_0) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Mặt khác, không gian $D[t]/_{(t-\alpha_0)^nD[t]}$ là $D[t]$-môđun liên kết với ma trận $J(\alpha_0)$. Hơn nữa, vì

$$V \cong D[t]/_{(t-\alpha_0)^nD[t]}$$

như là các $D[t]$-môđun nên theo Mệnh đề 3.1 ta có ma trận A đồng dạng với $J(\alpha_0)$.■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Cohn, P. M. (1985). *Free rings and their relations.* Academic Press.

Cohn, P. M. (1995). *Skew fields - Theory of General Division Rings.* Cambridge University Press.

Cohn, P. M. (2006). *Free Ideal Rings and Localization in General Rings.* Cambridge University Press.

ON THE JORDAN FORM OF MATRICES OVER DIVISION RINGS WITH SINGLE ELMENTARY DIVISORS

Cao Minh Nam

Campus in Ho Chi Minh City, University of Transport and Communications

Email: namcm@utc.edu.vn

(Received: 14/4/2023, Revised: 15/5/2023, Accepted for publication: 25/5/2023)

ABSTRACT

The main objective of this paper is to present some techniques on decomposition of matrices over division rings of P. M. Cohn in an intuitive and easy to understand way. From these results, we prove that every matrix over D with single elementary divisor is similar to a Jordan matrix, where D is a divison ring with center F satisfying D containing the algebraic closure of F and every irreducible polynomial on F has a root in D.

Keywords: *Division ring, matrix decomposition, Jordan matrix*